Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum:** 23.03.2020

Lösung

Vorbemerkung:

Bei diesen Aufgaben gehts um die Anwendung des Satzes des Pythagoras, um Streckenlängen in geometrischen Figuren zu berechnen. Dazu wird die Figur in Gedanken in Teilfiguren zerlegt, so dass rechtwinklige Dreiecke zum Erscheinen kommen.

Aufgabe 1: Die Figuren bestehen aus zwei rechtwinkligen Dreiecken, die eine gemeinsame Seite haben. Die gemeinsame Seite nennen wir a (Figuren zu Aufgabe 1).

a) Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $a^2 + 15^2 = 39^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $a^2 + x^2 = 47^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Gleichung (I) nach a^2 auf.
$a^2 + 15^2 = 39^2 | -15^2$
$a^2 = 39^2 - 15^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x auf.
$39^2 - 15^2 + x^2 = 47^2 | -39^2$
$-15^2 + x^2 = 47^2 - 39^2 | +15^2$
$x^2 = 47^2 - 39^2 + 15^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{47^2 - 39^2 + 15^2}$
$x = \sqrt{913}$ $x \sim 30{,}2\ cm$

b) Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $a^2 + 15^2 = 25^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $x^2 + 12^2 = a^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (I) nach a^2 auf.
$a^2 + 15^2 = 25^2 | -15^2$
$a^2 = 25^2 - 15^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 + 12^2 = 25^2 - 15^2 | -12^2$
$x^2 = 25^2 - 15^2 - 12^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{25^2 - 15^2 - 12^2}$
$x = \sqrt{256}$ $x = 16\ cm$

c) Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $a^2 + 7^2 = 25^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $x^2 + 18^2 = a^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (I) nach a^2 auf.
$a^2 + 7^2 = 25^2 | -7^2$
$a^2 = 25^2 - 7^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x^2 auf.
$x^2 + 18^2 = 25^2 - 7^2 | -18^2$
$x^2 = 25^2 - 7^2 - 18^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{25^2 - 7^2 - 18^2}$
$x = \sqrt{252}$
$x \sim 15{,}9\ cm$

d) Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $a^2 + 5^2 = 15^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $x^2 + 4^2 = a^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (I) nach a^2 auf.
$a^2 + 5^2 = 15^2 | -5^2$
$a^2 = 15^2 - 5^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 + 4^2 = 15^2 - 5^2 | -4^2$
$x^2 = 25^2 - 15^2 - 4^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{15^2 - 5^2 - 4^2}$
$x = \sqrt{184}$
$x \sim 13{,}6\ cm$

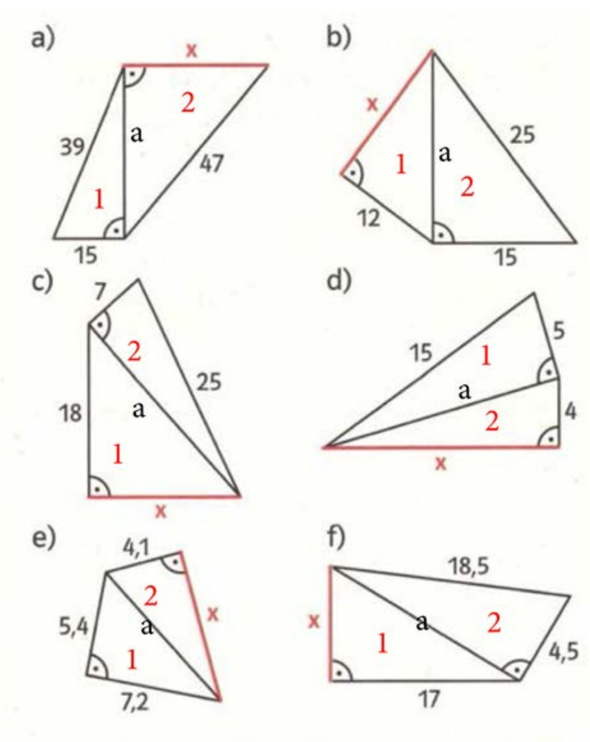
e) Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $x^2 + 4{,}1^2 = a^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $7{,}2^2 + 5{,}4^2 = a^2$ (II)
Die Glg. (II) ist schon nach a^2 aufgelöst. Wir brauchen nur den Rechenausdruck für a^2 aus (II) in die Glg. (I) einzusetzen und sie nach x aufzulösen.
$x^2 + 4{,}1^2 = 7{,}2^2 + 5{,}4^2 | -4{,}1^2$
$x^2 = 7{,}2^2 + 5{,}4^2 - 4{,}1^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{7{,}2^2 + 5{,}4^2 - 4{,}1^2}$
$x = \sqrt{64{,}19} \sim 8\ cm$

f) Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt: $x^2 + 17^2 = a^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt: $4{,}5^2 + a^2 = 18{,}5^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (II) nach a^2 auf.
$4{,}5^2 + a^2 = 18{,}5^2 | -4{,}5^2$
$a^2 = 18{,}5^2 - 4{,}5^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 + 17^2 = 18{,}5^2 - 4{,}5^2 | -17^2$
$x^2 = 18{,}5^2 - 4{,}5^2 - 17^2 | \sqrt{\ }$
$x = \sqrt{18{,}5^2 - 4{,}5^2 - 17^2}$
$x = \sqrt{33}\ cm \sim 5{,}7\ cm$

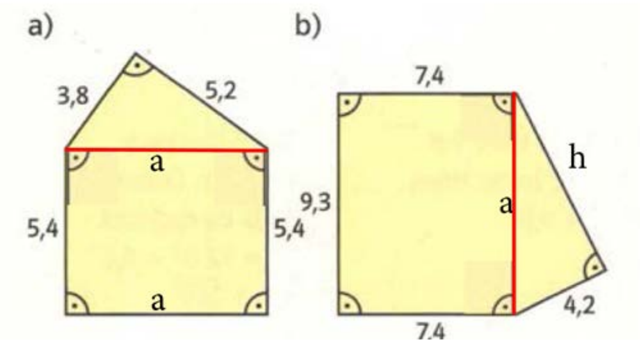
Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum**: 23.03.2020

Lösung

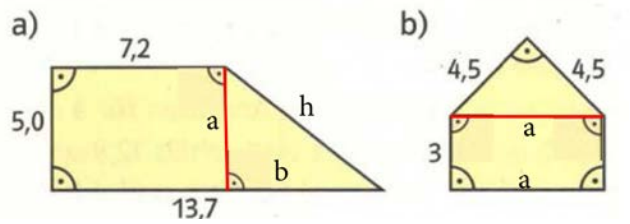
Zu Aufgabe 1



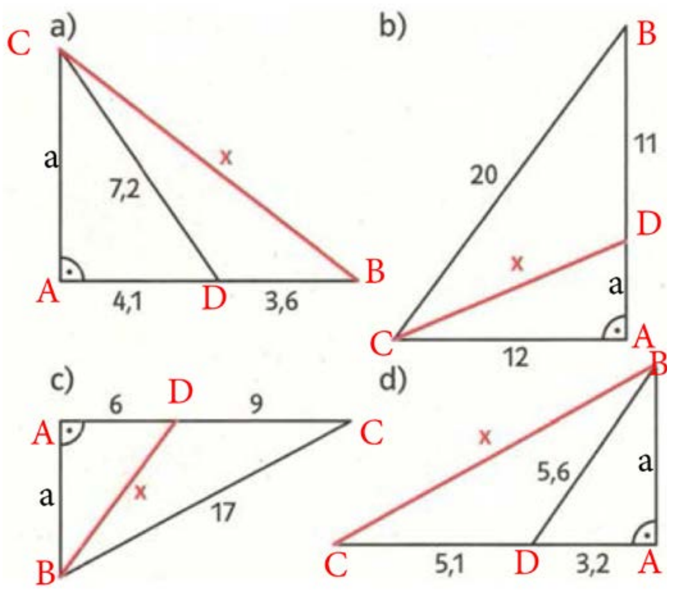
Zu Aufgabe 3:



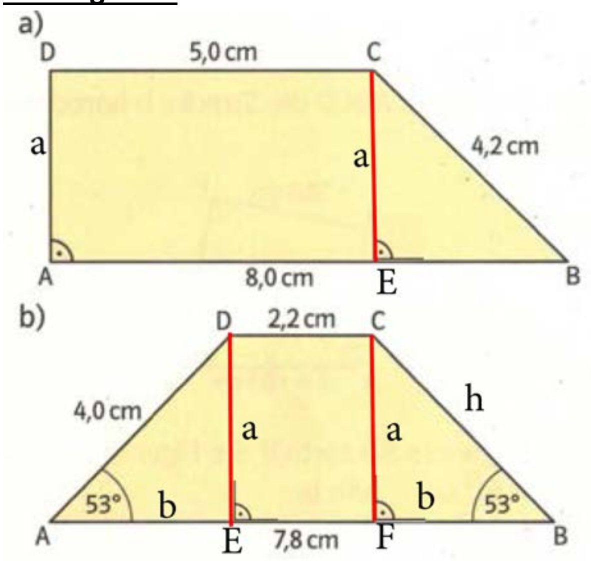
Zu Aufgabe 4:



Zu Aufgabe 2



Zu Aufgabe 5



Lehrer: Abderrafii Moktad/ Realschule Übach-Palenberg

Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum**: 23.03.2020

Lösung

<u>Aufgabe 2</u>: In dieser Aufgabe besteht die Figur aus zwei rechtwinkligen Dreiecken mit gemeinsamen rechten Winkel. Neben der Strecke x ist eine weitere Strecke unbekannt, die wir a nennen wollen. (Figuren zu Aufgabe 2)

a) Im rechtwinkligen Dreieck BAC gilt: $a^2 + (4{,}1 + 3{,}6)^2 = x^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck DAC gilt: $a^2 + 4{,}1^2 = 7{,}2^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (II) nach a^2 auf.
$a^2 + 4{,}1^2 = 7{,}2^2 | -4{,}1^2$
$a^2 = 7{,}2^2 - 4{,}1^2$
Nach Berechnung der Klammer setzen wir den Wert von a^2 in die Glg. (I) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 = 7{,}2^2 - 4{,}1^2 + 7{,}7^2 \ |\sqrt{\ }$
$x = \sqrt{7{,}2^2 - 4{,}1^2 + 7{,}8^2}$
$x = \sqrt{95{,}87 cm} \sim 9{,}8\ cm$
$x \sim 9{,}8\ cm$

b) Im rechtwinkligen Dreieck CAD gilt: $12^2 + a^2 = x^2$ (I)
Im rechtwinkligen CAB Dreieck gilt:
$12^2 + (a + 11)^2 = 20^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (II) nach a auf.
$12^2 + (a + 11)^2 = 20^2 | -12^2$
$(a + 11)^2 = 20^2 - 12^2 |\sqrt{\ }$
$a + 11 = \sqrt{20^2 - 12^2} | -11$
$a = \sqrt{20^2 - 12^2} - 11$
$a = \sqrt{20^2 - 12^2} - 11$
$a = 16 - 11 = 5$
Wir setzen dann den Wert von a in die Glg. (I) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 = 12^2 + 5^2 \ |\sqrt{\ }$
$x = \sqrt{12^2 + 5^2}$
$x = \sqrt{169}$
$x = 13\ cm$

c) Im rechtwinkligen Dreieck BAD gilt: $a^2 + 6^2 = x^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck BAC gilt: $a^2 + (6 + 9)^2 = 17^2$ (II)
Nach Ausrechnen der Klammer lösen wir zuerst die Glg. (II) nach a^2 auf.
$a^2 + 15^2 = 17^2 | -15^2$
$a^2 = 17^2 - 15^2$
Wir setzen dann den Wert von a^2 in die Glg. (I) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 = 17^2 - 15^2 + 6^2 \ |\sqrt{\ }$
$x = \sqrt{17^2 - 15^2 + 6^2}$
$x = \sqrt{100}$
$x \sim 10\ cm$

d) Im rechtwinkligen Dreieck DAB gilt: $a^2 + 3{,}2^2 = 5{,}6^2$ (I)
Im rechtwinkligen Dreieck CAB gilt:
$a^2 + (5{,}1 + 3{,}2)^2 = x^2$ (II)
Wir lösen zuerst die Glg. (I) nach a^2 auf.
$a^2 + 3{,}2^2 = 5{,}6^2 | -3{,}2^2$
$a^2 = 5{,}6^2 - 3{,}2^2$
Nach Ausrechnen der Klammer setzen wir den Wert von a^2 in die Glg. (II) ein und lösen sie nach x auf.
$x^2 = 5{,}6^2 - 3{,}2^2 + 8{,}3^2 \ |\sqrt{\ }$
$x = \sqrt{5{,}6^2 - 3{,}2^2 + 8{,}3^2}$
$x = \sqrt{90{,}01}$
$x \sim 9{,}5\ cm$

<u>Aufgabe 3</u>: In dieser Aufgabe lässt sich die Figur in Gedanken in ein rechtwinkliges Dreieck und ein Rechteckt zerlegen. Die unbekannte Strecke nennen wir a bzw. h (Figuren zu Aufgabe 3).

a) Der Umfang ist gegeben durch:
$U = a + 5{,}4 + 5{,}4 + 5{,}2 + 3{,}8$
Um a zu berechnen, wenden wir den Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck an.
Es gilt: $a^2 = 3{,}8^2 + 5{,}2^2$
Wir lösen die Gleichung nach a auf.
$a^2 = 3{,}8^2 + 5{,}2^2 |\sqrt{\ }$
$a = \sqrt{3{,}8^2 + 5{,}2^2}$
$a = \sqrt{41{,}48}$
Um möglichst einen genauen Wert zu erhalten, runden wir erst nach der Berechnung von U.
$U = \sqrt{41{,}48} + 5{,}4 + 5{,}4 + 5{,}2 + 3{,}8$
$U \sim 26{,}2\ cm$

b) Der Umfang ist gegeben durch:
$U = h + 7{,}4 + 9{,}3 + 7{,}4 + 4{,}2$
Um h zu berechnen, wenden wir den Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck an.
Es gilt: $a^2 = 4{,}2^2 + h^2$
Mit $a = 9{,}3$ folgt $9{,}3^2 = 4{,}2^2 + h^2$
Wir lösen die Gleichung nach h auf.
$4{,}2^2 + h^2 = 9{,}3^2 | -4{,}2^2$
$h^2 = 9{,}3^2 - 4{,}2^2 |\sqrt{\ }$
$h = \sqrt{9{,}3^2 - 4{,}2^2}$
$h = \sqrt{68{,}85}$
$U \sim \sqrt{68{,}85} + 4{,}2 + 7{,}4 + 9{,}3 + 7{,}4$
$U \sim 36{,}6\ cm$

Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum:** 23.03.2020

Lösung

Aufgabe 4: In dieser Aufgabe lässt sich die Figur in ein rechtwinkliges Dreieck und ein Rechteck teilen. (Figuren zu Aufgabe 4).

a) Der Umfang ist gegeben durch : $U = h + 7{,}2 + 5 + 13{,}7$
Um h zu berechnen, wenden wir den Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck an.
Es gilt: $h^2 = a^2 + b^2 = 5^2 + (13{,}7 - 7{,}2)^2$
Wir lösen die Gleichung nach a auf.
$h^2 = 5^2 + 6{,}5^2 | \sqrt{\ }$
$h = \sqrt{5^2 + 6{,}5^2}$
$h = \sqrt{67{,}25}$
$U \sim \sqrt{67{,}25} + 7{,}2 + 5 + 13{,}7$
$U \sim 34{,}1\ cm$
Der Flächeninhalt der Figur setzt sich aus dem Flächeninhalt des Rechtecks und dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zusammen.
Flächeninhalt des Rechteckes : $A = 7{,}2\ cm \cdot 5\ cm = 36\ cm^2$
Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks:

Ein rechtwinkliges Dreieck kann immer zu einem Rechteck ergänzt werden. Sein Flächeninhalt ist die Hälfte des zugehörigen Rechtecks.
Daher ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks gegeben durch:
$B = \frac{6{,}5\ cm \cdot 5cm}{2} \sim 16{,}3\ cm^2$
Der Flächeninhalt des rechtwinkliges Trapez ist dann
$C = A + B \sim 52{,}3\ cm^2$

b) Der Umfang ist gegeben durch: $U = a + 2 \cdot 4{,}5 + 2 \cdot 3$
Um a zu berechnen, wenden wir den Satz von Pythagoras im rechtwinkligen Dreieck an.
Es gilt: $a^2 = 4{,}5^2 + 4{,}5^2 = 2 \cdot 4{,}5^2$
Wir lösen die Gleichung nach a auf.
$a^2 = 2 \cdot 4{,}5^2 | \sqrt{\ }$
$a = \sqrt{2 \cdot 4{,}5^2}$
$a = \sqrt{40{,}5}$
$U \sim \sqrt{40{,}5} + 9 + 6$
$U \sim 21{,}4\ cm$
Der Flächeninhalt der Figur setzt sich aus dem Flächeninhalt des Rechtecks und dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zusammen.
Flächeninhalt des Rechteckes : $A = 3\ cm \cdot \sqrt{40{,}5}\ cm$
$A \sim 19{,}1 cm^2$
Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks:
$B = \frac{4{,}5\ cm \cdot 4{,}5cm}{2} \sim 10{,}1\ cm^2$
Hier kann das rechtwinklige Dreieck zu einem Quadrat ergänzt werden. Sein Flächeninhalt ist dann die Hälfte des Flächeninhalts des Quadrats.
Der Flächeninhalt de Figur ist dann $C = A + B \sim 29{,}2\ cm^2$

Lehrer: Abderrafii Moktad/ Realschule Übach-Palenberg

Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum: 23.03.2020**

Lösung

Aufgabe 5:

a) In dieser Teilaufgabe lässt sich die Figur gedanklich in ein rechtwinkliges Dreieck und ein Rechteck zerlegen. Die unbekannten Strecken $\overline{AD}$ und $\overline{EC}$ sind gleich und werden mit a bezeichnet.
Der Umfang ist gegeben durch: $U = a + 5 + 4{,}2 + 8$
Im rechtwinkligen Dreieck CEB gilt: $a^2 + (8-5)^2 = 4{,}2^2$
Wir lösen die Gleichung nach a auf.
$a^2 + 3^2 = 4{,}2^2 | -3^2$
$a^2 = 4{,}2^2 - 3^2 | \sqrt{\ }$
$a = \sqrt{4{,}2^2 - 3^2}$
$a = \sqrt{8{,}64}$
Damit das Ergebnis möglichst genau bleibt, runden wir den Wert ganz am Ende der Rechnung.
$U \sim \sqrt{8{,}64} + 5 + 4{,}2 + 8$
$U \sim 20{,}1\ cm$
Der Flächeninhalt der Figur setzt sich aus dem Flächeninhalt des Rechtecks und dem Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks zusammen.
Flächeninhalt des Rechteckes : $A = \sqrt{8{,}64}\ cm \cdot 5\ cm$
Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks:
Ein rechtwinkliges Dreieck kann immer zu einem Rechteck ergänzt werden. Sein Flächeninhalt ist die Hälfte des zugehörigen Rechtecks.
Daher ist der Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks gegeben durch:

$B = \frac{\sqrt{8{,}64}\ cm \cdot (8-5) cm}{2}$
Der Flächeninhalt des Trapez ist dann
$C = A + B = \sqrt{8{,}64}\ cm \cdot 5\ cm + \frac{\sqrt{8{,}64}\ cm \cdot 3cm}{2}$

$C \sim 19{,}11\ cm^2$

b) In dieser Teilaufgabe lässt sich die Figur im Gedanken in 2 rechtwinklige Dreiecke und ein Rechteckt zerlegen.
Die Figur ist ein Symmetrisches Trapez, da zwei gegenüberliegende Seiten parallel und zwei Innenwinkel an der Seite $\overline{AB}$ gleich sind. Die beiden Schenkel $\overline{AD}$ und $\overline{CB}$ sind damit auch gleich. Diese Schenkel sind die Hypotenuse der rechtwinkligen Dreiecke. Daraus folgt:
→ Die unbekannten Strecken $\overline{ED}$ und $\overline{FC}$ sind gleich groß und werden mit a bezeichnet.
→ Die beiden rechtwinkligen Dreiecke sind gleich.
$\Longrightarrow h = 4\ cm.$
Der Umfang ist gegeben durch:
$U = 2 \cdot 4 + 2{,}2 + 7{,}8$
$U = 18\ cm$

Der Flächeninhalt der Figur setzt sich aus dem Flächeninhalt des Rechteckes und dem Flächeninhalt der beiden rechtwinkligen Dreiecke zusammen.
Für die Berechnung des Flächeninhaltes brauchen wir die Strecken a und b.
Es gilt: $2b + 2{,}2 = 7{,}8 | -2{,}2$
$2b = 7{,}8 - 2{,}2 | :2$
$b = 2{,}8\ cm$
Um a zu berechnen, wenden wir den Satz des Pythagoras in einem der rechtwinkligen Dreiecke an.
$a^2 + b^2 = 4^2$
$a^2 + 2{,}8^2 = 4^2 | -2{,}8^2$
$a^2 = 4^2 - 2{,}8^2 | \sqrt{\ }$
$a = \sqrt{4^2 - 2{,}8^2}$
$a = \sqrt{8{,}16}$

Flächeninhalt des Rechteckes : $A = 2{,}2\ cm \cdot \sqrt{8{,}16}\ cm$
$A \sim 6{,}3\ cm^2$
Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks:
$B = \frac{b \cdot a}{2} = \frac{2{,}8\ cm \cdot \sqrt{8{,}16} cm}{2} \sim 4\ cm^2$
Der Flächeninhalts des Symmetrischen Trapez ist gegeben durch: $C = A + 2B$
$C = 2{,}2 \cdot \sqrt{8{,}16} + 2 \cdot \frac{2{,}8 \cdot \sqrt{8{,}16}}{2}$
$C = \sqrt{8{,}16} \cdot (2{,}2 + 2{,}8)$
$C \sim 14{,}3\ cm^2$

Mathematik Klasse 9 **Thema: Satz der Pythagoras**
Übungsblatt Nr.4 **Datum:** 23.03.2020

Lösung

Aufgabe 6:

Zur Berechnung des Umfangs müssen die Strecken a, b, c, d, e und f berechnet werden (Siehe Fig.).

In den rechtwinkligen Dreiecke A, C, D und F gilt nach dem Satz des Pythagoras in der Reihenfolge:

$a^2 = 12{,}64^2 + 26{,}80^2 \Longrightarrow a \sim \sqrt{878}$

$c^2 = 13{,}95^2 + 24{,}80^2 \Longrightarrow c \sim \sqrt{809{,}64}$

$d^2 = g^2 + 9{,}86^2$

Aus $g + 20{,}46 + 8{,}92 = 24{,}80 + 21{,}48$

folgt $g = 16{,}9\ m$

$\Longrightarrow d^2 = 16{,}9^2 + 9{,}86^2 \Longrightarrow d \sim \sqrt{382{,}83}$

$f^2 = 12{,}4^2 + (8{,}92 + 26{,}80)^2 \Longrightarrow$
$f \sim \sqrt{1492{,}68}$

Zur Berechnung der Strecken b und e ist der Satz des Pythagoras in den rechtwinkligen Dreiecke 1 und 2 anzuwenden (Siehe Figur).

Im rechtwinkligen Dreieck 1 gilt:

$b^2 = 21{,}48^2 + (13{,}95 - 12{,}64)^2$

$\Longrightarrow b \sim \sqrt{463{,}11}$

Im rechtwinkligen Dreieck 2 gilt:

$e^2 = 20{,}46^2 + (12{,}4 - 9{,}86)^2$

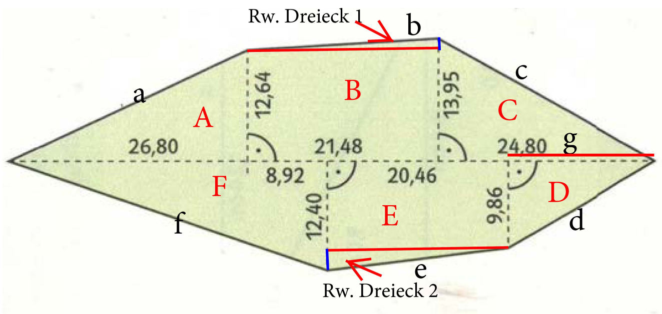
$\Longrightarrow e \sim \sqrt{425{,}06}$

Damit berechnet sich der Umfang zu:

$U = a + b + c + d + e + f$

$$U = \sqrt{878} + \sqrt{463{,}11} + \sqrt{809{,}64} + \sqrt{382{,}83} + \sqrt{425{,}06} + \sqrt{1492{,}68}$$

Der Umfang des Grundstückes ist $U \sim 158{,}42\ m$



Der Flächeninhalt des Grundstückes setzt sich zusammen aus den Teilflächen der rechtwinkligen Dreiecke A, C, D, F und den Flächeninhalten der Rechtecke B und E sowie aus den Flächeninhalten der rechtwinkligen Dreiecke 1 und 2.

Der Flächeninhalt der rechtwinkligen Dreiecke A, C, D, F zusammen bezeichnen wir mit A_1 und ist gegeben durch:

$$A_1 = \frac{26{,}80 \cdot 12{,}64}{2} + \frac{13{,}95 \cdot 24{,}80}{2} + \frac{g \cdot 9{,}86}{2} + \frac{12{,}40 \cdot (8{,}92 + 26{,}80)}{2}$$

Mit $g = 16{,}9\ m$ ist $A_1 = 647{,}137\ m^2$

Den Flächeninhalt der Rechtecke B und E zusammen bezeichnen wir mit A_2 ; dieser ist gegeben durch:

$A_2 = 21{,}48 \cdot 12{,}64 + 20{,}46 \cdot 9{,}86$

$A_2 = 473{,}2428\ m^2$

Den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks 1 bezeichnen wir mit A_3 ; dieser ist gegeben durch:

$$A_3 = \frac{21{,}48 \cdot (13{,}95 - 12{,}64)}{2}$$

$A_3 = 14{,}0694\ m^2$

Den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks 2 bezeichnen wir mit A_4 ; dieser ist gegeben durch:

$$A_4 = \frac{20{,}46 \cdot (12{,}40 - 9{,}86)}{2}$$

$A_4 = 25{,}9842\ m^2$

Die Gesamtfläche des Grundstücks ist

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 \sim 1160{,}43\ m^2$$